

## 2.2. Determinantning xossalari

**2.2.1-teorema.**  $2 \leq n \in N$  bo'lganda (2.1.1)  $n$ -tartibli determinant uchun

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = D_n, \quad i = \overline{1; n} \quad (2.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = D_n, \quad j = \overline{1; n}$$

munosabatlar o'rinlidir. Bu yerda  $D_n$  - (2.1.1)  $n$ -tartibli determinantning qiymati,  $A_{ij}$  esa  $a_{ij}$  elementining algebraik to'ldiruvchisidir.

**Isbot.** (2.2.1) ning birinchi munosabati  $i=1$  bo'lgan hol uchun to'g'ri ekanligi  $n$ -tartibli determinant qiymatining (2.1.3) ta'rifidan kelib chiqadi. Qolganlarini matematik induksiya usuli bilan ko'rsatamiz. Avvalo, (2.2.1) ning birinchi munosabati (2.1.1)  $n$ -tartibli determinantning  $i$ -satri bo'yicha, ikkinchisi esa  $j$ -ustuni bo'yicha yoyilmasi deb atalishini aytamiz.

$n=2$  uchun (2.2.1) o'rinli ekanligini ko'rsatish osondir. Masalan, ikkinchi ustun bo'yicha yoyilmani olsak,

$$\sum_{i=1}^2 a_{i2} A_{i2} = -a_{12} M_{12} + a_{22} M_{22} = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11} = D_2.$$

Qolganlari ham xuddi shunga o'xshash ko'rsatiladi.

Endi, (2.2.1)  $n-1$  uchun to'g'ri deb uni  $n$  uchun ham to'g'ri bo'lishini ko'rsataylik. Yuqorida aytganimizdek,

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} = D_n$$

ekanligi  $n$ -tartibli determinant qiymatining (2.1.3) ta'rifidan kelib chiqadi.

$n \geq 3$  bo'lganda yordamchi  $(n-2)$ -tartibli minor tushchasini kiritamiz. (2.1.1)  $n$ -tartibli determinant  $a_{ij}$  va  $a_{mk}$  ( $i \neq m, j \neq k$ ) elementlariga mos  $(n-2)$ -tartibli minor deb determinantning  $i$ - va  $m$ -satrlarini hamda  $j$ - va  $k$ -ustunlarini o'chirishdan hosil qilingan  $(n-2)$ -tartibli determinantga aytamiz va  $M_{ijmk}$  kabi belgilaymiz ( $M_{ijmk} = M_{mkij}$  ekanligi ravshandir).

Endi,  $i$ -satr bo'yicha determinant yoyilmasini qaraylik:

$$S_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} M_{ij}$$

Bu yerda  $M_{ij}$  (2.1.1)  $n$ -tartibli determinant  $a_{ij}$  elementining  $(n-1)$ -tartibli minori ekanligidan, u  $(n-1)$ -tartibli determinant bo'lib, yuqoridagi farazga ko'ra, uning uchun (2.2.1) munosabatlar o'rinlidir.  $2 \leq i \leq n$  bo'lganda  $M_{ij}$  ning birinchi satri bo'yicha yoyilmasi

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+\sigma} \cdot a_{1k} M_{ij1k}$$

bo'lib, bu yerda  $\sigma = \sigma_0(j-k)$ ,  $\sigma_0(x)$  esa Hevisaydning birlik funksiyasidir:

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Demak,

$$\begin{aligned}
S_i &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \sum_{j \neq k=1}^n (-1)^{k+\sigma} \cdot a_{1k} M_{ij1k} = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} \sum_{k \neq j=1}^n (-1)^{i+j+\sigma-1} \cdot a_{ij} M_{ij1k} = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} = S_1 = D_n,
\end{aligned}$$

ya'ni  $S_i = D_n$ ,  $i = \overline{2;n}$  ni olamiz. Bu satrlar bo'yicha yoyilmalar uchun (2.2.1) ning isbotidir.

Ustun bo'yicha yoyilmani olsak,  $j = \overline{2;n}$  bo'lganda, xuddi yuqoridagiga o'xshash,

$$U_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = U_1 = \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin (buni o'quvchining o'ziga qoldiramiz).

Endi,  $U_1 = S_1$  ekanligini ko'rsatish kifoyadir.

$$\begin{aligned}
U_1 &= \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \\
&= a_{11} M_{11} + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \sum_{j=2}^n (-1)^j a_{1j} M_{i11j} = \\
&= a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \sum_{i=2}^n (-1)^i a_{i1} M_{i11j} = \\
&= a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} = S_1.
\end{aligned}$$

Teorema isbotlandi.

(2.2.1) yordamida (2.1.1)  $n$ -tartibli determinantning quyidagi xossalarini isbotlash mumkin.

**1<sup>0</sup>.** Determinantning barcha satrlarini mos ustunlar qilib yozish (determinantni transponirlash) uning qiymatini o'zgartirmaydi.

**2<sup>0</sup>.**  $2 \leq n \in N$  bo'lganda determinantning ikkita satrlarining (ustunlarining) o'rinlari o'zaro almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshisiga o'zgaradi.

**3<sup>0</sup>.**  $2 \leq n \in N$  bo'lganda ikkita bir xil satrlarga (ustunlarga) ega bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

**4<sup>0</sup>.** Biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlari nolga teng bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

**5<sup>0</sup>.** Biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlari bir xil ko'paytuvchiga ega bo'lsa, bu ko'paytuvchini determinant tashqarisiga chiqarish mumkin, va aksincha, determinantni biror songa ko'paytirish uchun uning biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlarini shu songa ko'paytirish kifoyadir.

**6<sup>0</sup>.** Proportsional satrlarga (ustunlarga) ega bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

**7<sup>0</sup>.** Agar determinantning biror satrining (ustunining) har bir elementi yig'indidan iborat bo'lsa, u mos satrining (ustunining) elementi berilgan determinantdagi mos satr (ustun) elementining mos qo'shiluvchisidan, qolgan satrlari (ustunlari) esa berilgan determinant mos satrlaridan (ustunlaridan) iborat bo'lgan determinantlarning yig'indisiga tengdir. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**8<sup>0</sup>.** Determinant biror satri (ustuni) elementlari boshqa satrlar (ustunlar) mos elementlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, u nolga tengdir.

**9<sup>0</sup>.** Determinant biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satr (ustun) mos elementlarini bitta songa ko'paytirib qo'shilsa, uning qiymati o'zgarmaydi.

1<sup>0</sup> xossani matematik induksiya usulini qo'llab va (2.2.1) dan foydalanib isbotlash mumkin. Haqiqatdan ham,  $n=2$  uchun uning o'rinli ekanligiga bevosita (2.1.4) formuladan foydalanib ishonch hosil qilish osondir. Endi,  $(n-1)$ -tartibli determinant uchun bu xossa o'rinli deb faraz qilib, uni  $n$ -tartibli determinant uchun isbotlaylik. Agar qiymati  $D_n$  dan iborat berilgan (2.1.1)  $n$ -tartibli determinant barcha satrlarini mos ustunlar qilib yozishdan hosil qilingan determinantni berilganga *transponirlangan* deb atab, uning qiymatini  $D_n^*$  bilan belgilasak, uning birinchi satri bo'yicha yoyilmasidan foydalanib,

$$D_n^* = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}^* = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = D_n$$

ni olamiz ( $M_{ij}^*$  orqali  $M_{ij}$  ning transponirlangani belgilangan bo'lib, qilingan farazga ko'ra ular uchun  $M_{ij}^* = M_{ji}$  dir).

2<sup>0</sup> xossa ham xuddi shunga o'xshash isbotlanadi. Buning uchun  $n=2$  bo'lganda bevosita (2.1.4) dan foydalanish,  $n \geq 3$  bo'lganda esa determinantning o'z o'rnida qolgan satri (ustuni) bo'yicha (2.2.1) yoyilmasini yozish kifoyadir.

3<sup>0</sup> xossa 2<sup>0</sup> ning natijasi sifatida kelib chiqadi.

4<sup>0</sup> va 5<sup>0</sup> xossa unda qayd qilingan satr (ustun) bo'yicha determinant yoyilmasidan foydalanib isbotlanadi.

6<sup>0</sup> xossa 5<sup>0</sup> va 3<sup>0</sup> larning natijasi sifatida kelib chiqadi.

7<sup>0</sup> xossani ko'rsatish uchun elementlari yig'indilardan iborat satr (ustun) bo'yicha determinant yoyilmasidan foydalanish kerak bo'ladi.

8<sup>0</sup> va 9<sup>0</sup> xossalar 7<sup>0</sup> va 6<sup>0</sup> larning natijasidir.

Bulardan tashqari determinantning yana bitta xossasini isbotsiz keltiramiz.

**10<sup>0</sup>.**  $n$ -tartibli  $A$  va  $B$  determinantlarning elementlari vositasida elementlari

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{jk}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{kj} b_{ik}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{kj} b_{ki} \quad (i = \overline{1;n}, j = \overline{1;n})$$

formulalardan biri yordamida hisoblangan  $C$  determinant uchun

$$C = A \cdot B$$

o'rinlidir. Bu yerda  $a_{ij}$   $A$ ,  $b_{ij}$   $B$ ,  $c_{ij}$  esa  $C$  determinantlarning  $i$ -satri va  $j$ -ustuni elementidir ([4] §13).

**5-misol.**

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

**Yechish.** Uchinchi ustun elementlarini -2 ga ko'paytirib, birinchi ustun mos elementlariga, so'ngra -3 ga ko'paytirib, to'rtinchi ustun mos elementlarga qo'shsak,  $9^0$  xossaga ko'ra

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 10 & 3 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 10 & 3 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-80 - 30 + 18 + 120 - 10 + 36) = -54.$$

**2.2.2-teorema.**  $2 \leq n \in N$  bo'lganda  $n$ -tartibli determinant uchun

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik} D_n \quad (i = \overline{1;n}, \quad k = \overline{1;n})$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} D_n \quad (j = \overline{1;n}, \quad k = \overline{1;n}) \quad (2.2.2)$$

munosabatlar o'rinlidir. Bu yerda  $\delta_{pq}$ -Kroneker belgisi deb atalib,  $p \in N, q \in N$  bo'lganda

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ 1, & p = q. \end{cases}$$

kabi aniqlanadi.

**Isbot.** (2.2.2) ning birinchi munosabatida  $i=k$ , ikkinchisida esa  $j=k$  bo'lgan hollarning isboti 2.2.1-teoremadan kelib chiqadi. Demak, birinchi munosabatda  $i \neq k$  va ikkinchisida esa  $j \neq k$  deb faraz qilsak, ularning o'ng tomonlari noldan iborat bo'ladi. Chap tomonidagi ifoda esa (2.2.1) lar asosida birinchi munosabatda bir xil  $i$ - va  $k$ -satrlari, ikkinchisida esa bir xil  $j$ - va  $k$ -ustunlari mavjud bo'lgan determinantlar sifatida nolga tengdir. Teorema isbotlandi.

Bu teoremadan quyidagi xulosa kelib chiqadi:

*Determinant biror satri (ustuni) elementlarini algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi determinant qiymatiga, boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi esa nolga tengdir.*